Devoir maison n$^{\text{o}}$ 8 : correction

Exercice 1. (*d'après CCINP TSI 2024*)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. Elle est dérivable comme somme de fonctions usuelles et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On a $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$. Ainsi

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En particulier la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, autrement dit $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x}$.

Q2. En déduire alors que : $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{H_n} \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, en déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{H_n} \geqslant n + 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, d'après la question précédente pour $x = \frac{1}{k}$, on a $e^{1/k} \geqslant 1 + \frac{1}{k}$. Ainsi par produit de termes positifs :

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{1/k} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right) = \mathrm{e}^{H_n}\,.$$

- Comme $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$, le membre de droite de l'inégalité précédente vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$ par télescopage (on sinon on remarque que le produit des numérateurs vaut $(n+1)!$ et celui des dénominateurs $n!$ et on simplifie). Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ e^{H_n} \geqslant n + 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient initialement une boule noire. On effectue n tirages dans l'urne de la manière suivante :

- au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche ;
- on considère n tirages indépendants.

Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par :

- $X_k = 0$ si la boule tirée lors du k-ième tirage est blanche ;
- $X_k = 1$ si la boule tirée lors du k-ième tirage est noire.

On définit enfin la variable Z_n par $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q3. Que représente la variable Z_n ?

La variable Z_n est une somme de termes valant 1 ou 0 suivant si on obtient ou non la boule noire au k-ème tirage. Ainsi $\boxed{Z_n \text{ représente le nombre d'obtentions de la boule noire au cours des } n \text{ tirages}}$.

Q4. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Reconnaître la loi de X_k et préciser son espérance.

On a $X_k(\Omega) = \{0,1\}$ donc $\boxed{X_k \text{ suit une loi de Bernoulli}}$. De plus, au k-ème tirage, l'urne contient une boule noire et $k-1$ boules blanches (ajoutées une à une lors des $k-1$ tirages précédents) donc $\boxed{\text{le paramètre de cette loi de Bernoulli vaut } 1/k}$.

Q5. Vérifier que l'espérance de Z_n est H_n.

D'après la question précédente (et le cours), pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a $E(X_k) = \frac{1}{k}$. Ainsi par linéarité de l'espérance, on obtient

$$E(Z_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \boxed{H_n}.$$

Q6. En utilisant **Q2**, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut espérer obtenir en moyenne au moins 4 fois la boule noire.
On pourra utiliser le fait suivant : $\mathrm{e}^4 \in \,]54\,;55[$.

La condition voulue est $E(Z_n) \geqslant 4$, *i.e.* d'après la question précédente $H_n \geqslant 4$. Par croissance de l'exponentielle, ceci équivaut à $\mathrm{e}^{H_n} \geqslant \mathrm{e}^4$. D'après **Q2**, ceci est vrai dès que $n+1 \geqslant \mathrm{e}^4$, *i.e.* $n \geqslant e^4 - 1$. Finalement via l'indication, $\boxed{n = 54}$ convient.